DIE ANWENDUNG

DER

ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

BEI BERECHNUNG ABSOLUTER STÖRUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT MARBURG

VORGELEGT VON

HARRY GRAVELIUS

AUS

FRANKFURT AM MAIN.

MARBURG
1893.

Als Dissertation angenommen 26. IV. 93.

HERRN

VERLAGSBUCHHÄNDLER HUGO BERNSTEIN

CHEF VON FERDINAND DÜMMLER'S VERLAGSBUCHHANDLUNG IN BERLIN

ALS EIN ZEICHEN

AUFRICHTIG TREUER VEREHRUNG

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554034_0090

Die Anwendung der elliptischen Functionen bei Berechnung absoluter Störungen.

§ 1.

Die hier gezeigte Verwendung der elliptischen Functionen in der Störungstheorie ist nach dem Grundgedanken bereits im Jahre 1886 von mir zum ersten Male aufgestellt und damals auch schon Herrn Weierstrass mitgetheilt worden. Im Jahre 1889 habe ich dann die sechs Grundformeln im Bulletin Astronomique bekannt gegeben. Ich wende bei Einführung der Formeln die mir geläufigeren Weierstrass'schen Bezeichnungen an. Demnach sind es folgende Relationen, von denen ich ausgehe:

$$u = \int_{pu}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

$$\begin{aligned}
(e_1-e_2)\sigma^2 u + \sigma_1{}^2 u &= \sigma_2{}^2 u \\
(e_1-e_3)\sigma^2 u + \sigma_1{}^2 u &= \sigma_3{}^2 u \\
(e_2-e_3)\sigma^2 u + \sigma_2{}^2 u &= \sigma_3{}^2 u \\
(e_2-e_3)\sigma_1{}^2 u + (e_1-e_2)\sigma_3{}^2 u &= (e_1-e_3)\sigma_2{}^2 u.
\end{aligned}$$

Wenn nun ferner unter ε die excentrische Anomalie eines Planeten verstanden wird, so setze ich

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{e_1-e_2}\cdot\frac{\sigma u}{\sigma_2 u}, \qquad \cos\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}, \qquad 1.$$

wo die zusammengehörigen Werthe ε und u sich durch die Bedingung bestimmen, dass gleichzeitig

$$\varepsilon = 0, \quad u = 0.$$

Aus den Gleichungen 1) folgt nun sofort

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varepsilon &= 2\sqrt{e_1-e_2}\cdot\frac{\sigma u\cdot\sigma_1 u}{\sigma_2 u\cdot\sigma_2 u} \\
\cos\varepsilon &= 2\frac{\sigma_1{}^2 u}{\sigma_2{}^2 u} - 1 \\
\frac{1}{2}\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}\frac{d\varepsilon}{du} &= \sqrt{e_1-e_2}\cdot\frac{d}{du}\frac{\sigma u}{\sigma_2 u}.
\end{aligned}\right\} 2.$$

Nun beweist man leicht die Richtigkeit folgender Formeln:

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma u}{\sigma_2 u} = \frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = (e_2 - e_3)\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u},$$

mit deren Hilfe man die erste und dritte der Gleichungen 2) so reducirt:

$$\sin\varepsilon = \frac{2\sqrt{e_1 - e_2}}{e_2 - e_3}\cdot\frac{d}{du}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$\frac{d\varepsilon}{du} = 2\sqrt{e_1 - e_2}\cdot\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}.$$

Der Radiusvector des Planeten ist gegeben durch

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\varepsilon.$$

Transformiren wir durch die Variabele u, so kommt

$$\frac{r}{a} = (1+e)\left(1 - \frac{2e}{1+e}\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u}\right).$$

Auf Grund dieser Gleichung nun bestimmen wir das eingeführte System elliptischer Functionen näher so, dass es mit dem astronomischen Problem in engeren Zusammenhang tritt. Es besteht nämlich auch die Relation

$$\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} = 1 - \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

und die Grössen e_1, e_2, e_3 genügen bekanntlich immer der Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Setze ich daher jetzt

$$\begin{aligned} e_1 - e_3 &= 1 \\ \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} &= \frac{2e}{1+e}, \end{aligned} \qquad 3.$$

so sind also im Ganzen drei Gleichungen vorhanden, um die drei Grössen e_1, e_2, e_3 als Functionen der Excentricität des Planeten zu bestimmen. Zur Abkürzung wird noch gesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} &= \varkappa^2 \\ \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} &= 1 - \varkappa^2 = \varkappa'^2. \end{aligned} \qquad 3^a.$$

Dann bestehen folgende später häufig zu brauchende Formeln:

$$\frac{2e}{1+e} = \varkappa^2, \qquad \frac{1-e}{1+e} = \varkappa'^2$$

$$e = \frac{\varkappa^2}{1+\varkappa'^2}, \quad 1+e = \frac{2}{1+\varkappa'^2} \qquad 3^b.$$

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{2\varkappa'}{1+\varkappa'^2}, \quad 1-e = \frac{2\varkappa'^2}{1+\varkappa'^2}.$$

Setzen wir ferner noch zur Abkürzung

$$\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = \chi u,$$

so stellen sich unsere vorhin gegebenen Formeln leicht, wie folgt, dar:

$$d\varepsilon = 2\varkappa'\chi u \cdot du$$

$$\sin\varepsilon = \frac{2\varkappa'}{\varkappa^2}\frac{d\chi}{du}, \quad \cos\varepsilon = \frac{1+\varkappa'^2}{\varkappa^2} - \frac{2\varkappa'^2}{\varkappa^2}\chi^2 u \qquad 4.$$

$$\frac{r}{a} = \frac{2\varkappa'^2}{1+\varkappa'^2}\chi^2 u.$$

Endlich bemerken wir noch, dass, wenn g die mittlere Anomalie bedeutet,

$$dg = \frac{r}{a}\, d\varepsilon,$$

wonach also

$$dg = \frac{4\varkappa'^3}{1+\varkappa'^2}\chi^3(u) \cdot du. \qquad 4^1.$$

§ 2.

Die Integration der Störungsgleichungen in der Form, wie ich sie nachher anwende, erfordert noch die vorgängige Berechnung der Ausdrücke

$$r\cos f, \quad r\sin f; \quad \frac{\cos f}{r}, \quad \frac{\sin f}{r}; \quad \sin f, \quad \cos f + e,$$

wo f die wahre Anomalie des gestörten Planeten, r dessen Radiusvector und e seine Excentricität bedeutet. Wenn man sich nun der Formeln erinnert

$$\frac{r}{a}\sin f = \sqrt{1-e^2}\cdot\sin\varepsilon, \quad \frac{r}{a}\cos f = \cos\varepsilon - e,$$

so erhält man sofort

$$\frac{r}{a}\sin f = \frac{4\varkappa'^2}{1-\varkappa'^4}\frac{d\chi}{du}$$

$$\frac{r}{a}\cos f = \frac{4\varkappa'^2}{1-\varkappa'^4} - \frac{2\varkappa'^2}{\varkappa^2}\chi^2(u) \qquad 5.$$

und aus diesen Formeln in Verbindung mit denjenigen des vorigen § findet sich weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{a\sin f}{r} &= \frac{1+\varkappa'^2}{\varkappa^2\varkappa'^2}\,\frac{1}{\chi^4 u}\,\frac{d\chi}{du}\\
\frac{a\cos f}{r} &= \frac{1+\varkappa'^2}{\varkappa^2\varkappa'^2}\,\frac{1}{\chi^4 u} - \frac{(1+\varkappa'^2)^2}{4\varkappa^2\varkappa'^2}\,\frac{1}{\chi^2 u}\\
\sin f &= \frac{2}{1-\varkappa'^2}\,\frac{1}{\chi^2 u}\,\frac{d\chi}{du}\\
\cos f + e &= \frac{2}{1-\varkappa'^2}\,\frac{1}{\chi^2 u} - \frac{4\varkappa'^2}{1-\varkappa'^4}.
\end{aligned} \qquad 6.$$

Dies ist aber noch nicht die endgültige Form, in der wir diese Grössen benutzen. Denn die Störungsgleichungen erscheinen alle in der Form

$$\frac{d\xi}{dt} = h\cdot F,$$

wo F von den Coordinaten des gestörten Planeten und den partiellen Ableitungen der Störungsfunction abhängt, und h die aus Hansen's Theorie bekannte Grösse ist

$$h = \frac{an}{\cos\varphi}$$

(n = mittlere tägliche Bewegung, φ = arc sin e). Es tritt nun aber u an Stelle von t als unabhängige Variabele; und es ist

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{dt}{du} = \frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{dg}{du}.$$

Wir müssen also alle unsere Ausdrücke $\frac{1}{n}\frac{d\xi}{dt}$ mit $\frac{dg}{du}$ multipliciren. Dies geschieht, indem wir die als Factoren auftretenden Grössen 6. mit $\frac{dg}{du}$ multipliciren. Diese werden daher jetzt als rationale Functionen von χu und $\chi' u$ erscheinen. Um dieselben später berechnen zu können, führe ich einen Satz an, den ich schon 1889 im Bulletin astronomique gegeben habe.

§ 3.

Unsere Function χu genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\chi}{du}\right)^2 + (1-\chi^2)(1-\varkappa'^2\chi^2) = 0. \qquad \text{I.}$$

Hieraus folgt durch Differentiation, nach Weglassung des Factors $\frac{d\chi}{du}$

$$\frac{d^2\chi}{du^2} = (1+\varkappa'^2)\chi - 2\varkappa'^2\chi^3. \qquad \text{II.}$$

Machen wir in I. die Substitution

$$\frac{d\chi}{du} = \frac{1}{2\chi}\frac{d\chi^2}{du}$$

und differentiiren, so kommt, wieder nach Weglassung des Factors $\frac{d\chi^2}{du}$,

$$\frac{d^2\chi^2}{du^2} = -2 + 4(1+\varkappa'^2)\chi^2 - 6\varkappa'^2\chi^4. \qquad \text{III.}$$

Differentiiren wir II. und III. zweimal und reduciren, so erhalten wir

$$\frac{d^4\chi}{du^4} = \Big((1+\varkappa'^2) + 12\varkappa'^2\Big)\chi - 20\varkappa'^2(1+\varkappa'^2)\chi^3 + 24\varkappa'^4\chi^5 \qquad \text{IV.}$$

$$\frac{d^4\chi^2}{du^4} = -8(1+\varkappa'^2) + \Big(16(1+\varkappa'^2) + 72\varkappa'^2\Big)\chi^2 - 120\varkappa'^2(1+\varkappa'^2)\chi^4 + 120\varkappa'^4\chi^6. \qquad \text{V.}$$

Die Betrachtung der Gleichungen II. bis V. legt die Vermuthung nahe, dass allgemein ist

$$\begin{aligned}\frac{d^{2n}\chi}{du^{2n}} &= A_0^{(n)}\chi + A_1^{(n)}\chi^3 + \ldots + A_n^{(n)}\chi^{2n+1}\\ \frac{d^{2n}\chi^2}{du^{2n}} &= B_0^{(n)} + B_1^{(n)}\chi^2 + \ldots + B_n^{(n)}\chi^{2n+2}.\end{aligned} \qquad \text{VI.}$$

In der That lässt sich die Richtigkeit dieser Gleichungen durch den Schluss von n auf $n+1$ nachweisen, wobei sich dann noch die Recursionsformeln ergeben:

$$\begin{aligned}A_r^{(n+1)} &= (1+\varkappa'^2)(2r+1)^2 A_r^{(n)} - \varkappa'^2\cdot 2r(2r-1)A_{r-1}^{(n)} - (2r+2)(2r+3)A_{r+1}^{(n)}\\ B_r^{(n+1)} &= 4(1+\varkappa'^2)r^2 B_r^{(n)} - \varkappa'^2\cdot(2r-2)(2r-1)B_{r-1}^{(n)} - (2r+1)(2r+2)B_{r+1}^{(n)}\end{aligned} \qquad \text{VII.}$$

Die durch VI. gegebenen Sätze lassen sich leicht in Worten ausdrücken; mit ihrer Hülfe ist es also möglich, die geraden und ungeraden Potenzen von χu aus χu und $\chi^2 u$ und deren Ableitungen zu berechnen. Ganz dasselbe gilt für diene gativen ganzen Potenzen von χu vermöge der Relation

$$\overset{-1}{\chi}(u) = \varkappa'\chi(u+\omega),$$

wo

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}.$$

Nun ist

$$\frac{2\omega}{\pi}\cdot\varkappa'\chi u = 1 + 4\Sigma(-1)^r\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cos\frac{r\pi u}{\omega},$$

wo q die bekannte in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Grösse ist. Die Entwickelung für $\chi^2 u$ erhalten wir aus der Relation

$$(\varkappa'\chi u)^2 = \frac{d^2}{du^2}\log\sigma_2 u + e_1$$

und zwar wie folgt;

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\varkappa'\chi u\right)^2 = 1 - 8\Sigma\frac{(-1)^r q^{2r}}{1-q^{2r}} - 8\Sigma\frac{(-1)^r r q^r}{1-q^{2r}}\cos\frac{r\pi u}{\omega}.$$

Den Modul q berechnet man bekanntlich aus

$$q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \ldots,$$

wo

$$l = \frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}}.$$

Setzen wir noch

$$\eta = \frac{2\omega}{\pi}, \quad \varepsilon = \frac{2\omega}{\pi}\cdot\varkappa', \quad \lambda = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2(1+\varkappa'^2) = \frac{1}{4}(\varepsilon^2+\eta^2), \quad v = \frac{\pi u}{\omega},$$

so können wir folgende Formeln für die ersten sechs Potenzen von χu aufstellen:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\chi u) &= a_0 + 4\Sigma(-1)^r a_r\cos rv\\
(\varepsilon\chi u)^2 &= b_0 - 8\Sigma(-1)^r b_r\cos rv\\
(\varepsilon\chi u)^3 &= c_0 + 16\Sigma(-1)^r c_r\cos rv\\
(\varepsilon\chi u)^4 &= d_0 - 32\Sigma(-1)^r d_r\cos rv\\
(\varepsilon\chi u)^5 &= e_0 + 64\Sigma(-1)^r e_r\cos rv\\
(\varepsilon\chi u)^6 &= f_0 - 128\Sigma(-1)^r f_r\cos rv,
\end{aligned}$$

$$a_0 = 1 \quad ; \qquad b_0 = 1 - 8\Sigma(-1)^r\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}; \qquad c_0 = 2\lambda$$

$$a_r = \frac{q^r}{1+q^{2r}}; \qquad b_r = \frac{rq^r}{1-q^{2r}} \quad ; \qquad c_r = \frac{1}{2}(\lambda + r^2)a_r$$

$$d_0 = \frac{8}{3}\lambda b_0 - \frac{1}{3}\varepsilon\eta^2; \quad e_0 = \frac{3}{8}\eta^4(1-\varkappa^2\varkappa'^2) \quad ; \quad f_0 = \frac{16}{5}\lambda d_0 - \frac{3}{5}\varepsilon^2\eta^2\left(b_0 - \frac{1}{36}\lambda\right)$$

$$d_r = \left(\frac{2}{3}\lambda + r^2\right)b_r \; ; \quad e_r = \left\{\frac{1}{16}e_0 + r^2\left(\frac{5}{12} + r^2\right)\right\}a_r \; ; \quad f_r = \lambda d_r - \frac{1}{16}\left(\beta - \frac{2}{15}r^4\right)b_r$$

$$\beta = \frac{32}{15}\lambda^2 + \frac{3}{5}\varepsilon^2\eta^2.$$

Die Grössen ε, η sind gegeben durch die Reihen

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + - \ldots)^2\\
\eta &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots..)^2,
\end{aligned}$$

die bei den beabsichtigten numerischen Anwendungen in unserem Planetensystem stets mit dem dritten Glied abgebrochen werden können. Mit Hülfe der obigen

Darstellungen der Potenzen der Function χu ist übrigens gleichzeitig auch eine solche für die Potenzen von $\chi' u$ erlangt, bezw. für alle Ableitungen von χu. In der That kann $\chi' u$ selber aus der Reihe für χu stets durch directe Differentiation abgeleitet werden; und für eine beliebige ganze Zahl n ist

$$\left(\frac{d\chi}{du}\right)^{2n} = (-1)^n (1 - \overline{1 + \varkappa'^2} \cdot \chi^2 + \varkappa'^2 \chi^4)^n ,$$

d. h. diese Potenz von $\chi' u$ erscheint als ganze rationale Function von $\chi^2 u$

$$(\chi' u)^{2n} = (-1)^n (1 + a_1 \chi^2 + a_2 \chi^4 + \ldots + a_n \chi^{4n}) ,$$

wo die a_r Functionen des Moduls $\varkappa'$ sind. Und aus dieser Formel fliesst dann sofort auch für die ungeraden Potenzen von $\chi' u$ folgendes Ergebniss:

$$(\chi' u)^{2n+1} = (-1)^n \frac{d}{du} \left(\chi + \frac{1}{3} a_1 \chi^3 + \frac{1}{5} a_2 \chi^5 + \ldots + \frac{1}{4n+1} a_{2n} \chi^{4n+1}\right) ,$$

Des Zusammenhangs wegen sei noch bemerkt, obgleich im Folgenden kein Gebrauch davon gemacht werden wird, dass man in gleich einfacher Weise auch für die negativen Potenzen der Function χu ganz analoge Sätze ableiten kann, wie sie vorhin für die ganzen positiven Potenzen erhalten worden sind. Man wird dazu, indem man setzt

$$\overset{-1}{\chi}(u) = \xi ,$$

ausgehen von den Gleichungen

$$\frac{d^2 \xi}{du^2} = (1 + \varkappa'^2) \xi - 2\xi^3$$

$$\frac{d^2 \xi^2}{du^2} = 2\varkappa'^2 + 4 (1 + \varkappa'^2) \xi^2 - 6\xi^4 ,$$

und mit diesen dann ebenso weiter verfahren, wie es oben mit den entsprechenden Gleichungen für χu geschehen ist.

§ 4.

Nach diesen Auseinandersetzungen über die Darstellung der Potenzen von χu und $\chi' u$ ist es nun möglich, näher in die Anwendung einzutreten. Zunächst können nun die Formeln 5. und 6. in § 2 in der dort erwähnten Weise vervollkommnet werden.

Wir finden

$$\frac{r}{a}\sin f\frac{dg}{du} = \frac{4\varkappa'}{\varkappa^2(1+\varkappa'^2)^2}\frac{d}{du}(\varkappa'\chi u)^4$$

$$\frac{r}{a}\cos f\frac{dg}{du} = \frac{8}{\varkappa^2(1+\varkappa'^2)}\left(\frac{2\varkappa'^2}{1+\varkappa'^2}(\varkappa'\chi u)^3-(\varkappa'\chi u)^5\right)$$

$$\frac{a}{r}\sin f\frac{dg}{du} = \frac{4\varkappa'}{\varkappa^2}\cdot\frac{1}{\chi u}\cdot\chi' u$$

$$\frac{a}{r}\cos f\frac{dg}{du} = \frac{4\varkappa'}{\varkappa^2}\cdot\frac{1}{\chi u}-\frac{2(1+\varkappa'^2)}{\varkappa^2}\cdot\varkappa'\chi u$$

$$\sin f\frac{dg}{du} = \frac{4\varkappa'}{\varkappa^2(1+\varkappa'^2)}\frac{d}{du}(\varkappa'\chi u)^2$$

$$(\cos f+e)\frac{dg}{du} = \frac{8\varkappa'^2}{\varkappa^2(1+\varkappa'^2)^2}\cdot\frac{d^2}{du^2}(\varkappa'\chi u).$$

Die dritte dieser Gleichungen scheint die Einführung der Function $\log\chi u$ zu verlangen, da sie die logarithmische Derivirte von χu enthält. In Wirklichkeit ist die Anwendung dieser Function aber nicht erforderlich. Denn $\frac{a}{r}\sin f$ ist in den Störungsgleichungen multiplicirt in $r\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial r}$, wo Ω die Störungsfunction bedeutet; und diese letztere Grösse werden wir darstellen als ein Aggregat homogener Functionen von $\frac{r}{a}\sin f$ und $\frac{r}{a}\cos f$, vom zweiten und den höheren Graden, so dass also bei Herstellung der definitiven Form der Störungsformeln die negative erste Potenz von χu herausfällt.

Bevor diese letzteren Formeln gegeben werden, möge noch darauf hingewiesen sein, dass ich in den Rechnungen über absolute Planetenstörungen besondere Entwicklungen für die Componenten der störenden Kräfte, also $\frac{\partial\Omega}{\partial f}$, $r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$, wenn man sich zunächst auf die Störungen in der Bahn beschränkt, nicht anwende, sondern diese beiden Ausdrücke aus der Entwicklung der Störungsfunction wie folgt berechne. Diese letztere ist natürlich herzustellen als eine trigonometrische Reihe nach dem Argumente u, sowie anderen Argumenten, welche irgendwie von dem störenden Planeten abhängen; die Integration der Störungsgleichungen ist nach der Variabelen u auszuführen, welche an Stelle der Zeit t jetzt als die unabhängige Veränderliche des ganzen Problems erscheint. Man wird demnach haben:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u} = \frac{\partial\Omega}{\partial f}\frac{df}{du}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{du}.$$

Die hier nothwendigen Ableitungen von f und r ergeben sich leicht, die letztere ohne weiteres aus Gleichung 4. § 1, die erstere durch Beachtung der Relation

$$df = \frac{a^2}{r^2}\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot dg.$$

Es wird erhalten

$$\frac{df}{du} = \frac{2}{\chi u}, \quad \frac{dr}{du} = 2r \cdot \frac{\chi' u}{\chi u},$$

wonach sich dann folgende Gleichung für die Transformation von $\frac{\partial \Omega}{\partial f}$ in $\frac{\partial \Omega}{\partial u}$ ergiebt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial f} = \tfrac{1}{2} \chi u \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \chi' u \cdot r \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Hier wird man also nun $\frac{\partial \Omega}{\partial u}$ durch directe Differentiation aus dem entwickelten Ω erhalten; während andererseits sich auch zeigen lässt, wie mit Hülfe einer ganz einfachen Anwendung des Euler'schen Satzes über homogene Functionen auch $r \frac{\partial}{\partial r}$ aus der Entwicklung von Ω ohne jede Mühe hergeleitet werden kann. Dieser Nachweis wird im § 6 gegeben werden.

§ 5.

Die Störungsgleichungen*) lauten nun, wenn wir uns hier zunächst auf die Berechnung der Störungen erster Ordnung in der Bahn beschränken, also von den Breitenstörungen absehen:

$$\frac{dw}{dt} = -3h \frac{\partial \Omega}{\partial f}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 2h \frac{\sin f}{r} \cdot r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{2h}{\varkappa^2 (1+m)} \left(\varkappa^2 (1+m) \frac{\cos f}{r} + h^2 (\cos f + e) \right) \frac{\partial \Omega}{\partial f}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -2h \frac{\cos f}{r} \cdot r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{2h}{\varkappa^2 (1+m)} \left(\varkappa^2 (1+m) \frac{\sin f}{r} + h^2 \sin f \right) \frac{\partial \Omega}{\partial f}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = w + \xi \cdot \bar{r} \cos f + \eta \cdot \bar{r} \sin f$$

$$\frac{dv}{dt} = \tfrac{1}{2} h \left(\xi \sin f - \eta (\cos f + e) \right).$$

Hier bedeutet $\varkappa^2$ die Gauss'sche Constante, m die Masse des gestörten Körpers und h ist wieder definirt durch

$$h = \frac{an}{\cos \varphi},$$

wo a die mittlere Entfernung des gestörten Körpers von der Sonne, n seine mittlere tägliche Bewegung und $\varphi = \arcsin e$ ist.

*) Ich leite die hier gegebene Form dieser Gleichungen an anderer Stelle ab.

Nach Auflösung der Störungsgleichungen berechnen sich die wahren Coordinaten $\mathfrak{r}, \mathfrak{v}$ des gestörten Körpers in seiner Bahn aus folgendem Gleichungssystem, in dem noch M_0 die mittlere Anomalie und π_0 die Perihellänge der Epoche bedeutet:

$$\begin{aligned} \varepsilon - e \sin \varepsilon &= n\zeta + M_0 \\ \bar{r} \cos v &= a \cos \varepsilon - ae \\ \bar{r} \sin v &= a \cos \varphi \sin \varepsilon \\ \mathfrak{v} &= v + \pi_0 \\ \mathfrak{r} &= \bar{r}(1+\nu). \end{aligned}$$

Die drei ersten Störungsgleichungen sind auf unsere unabhängige Variabele u zu transformiren, wonach sie folgende Gestalt erhalten, wenn wir noch zur Abkürzung der Schreibweise

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = P, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial u} = Q$$

setzen.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{du} &= \frac{3a}{\varkappa'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{du}(\varkappa'\chi u)^4 \cdot P - (\varkappa'\chi u)^4 Q\right) \\ \frac{\varkappa^2 \cdot \varkappa'^2}{1+\varkappa'^2}\frac{d\xi}{du} &= \frac{1}{2}\frac{d}{du}(\varkappa'\chi u)^4 \cdot P + \left(\varkappa'^2 - (\varkappa'\chi u)^4\right) Q \\ &= \frac{\varkappa'^2}{3a}\frac{dw}{du} + \varkappa'^2 Q \\ \frac{\varkappa^2 \cdot \varkappa'^2}{1+\varkappa'^2}\frac{d\eta}{du} &= \frac{2}{\varkappa'}\left(-(1+\varkappa'^4)(\varkappa'\chi u)^3 + (1+\varkappa'^2)(\varkappa'\chi u)^5\right) \cdot P \\ &\quad + \frac{2}{\varkappa'}\frac{d}{du}\left(\varkappa'^2 \cdot (\varkappa'\chi u) + \frac{1+\varkappa'^2}{6}(\varkappa'\chi u)^3\right) \cdot Q. \end{aligned}$$

Behufs Integration dieser Gleichungen sind nun P und Q in trigon. Reihen nach den Vielfachen des Argumentes u zu entwickeln. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst die Störungsfunction Ω selber, die in bekannten Bezeichnungen die Form hat

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos(r_1 r')\right).$$

Der wichtigste und für die laufende astronomische Arbeit am meisten in Betracht kommende Fall im Sonnensystem ist derjenige der Störungen der kleinen Planeten bezw. der periodischen Cometen durch Jupiter und Saturn, mit Rücksicht auf welchen Fall auch vorliegende Methode in erster Linie zum Vorschlag gebracht wird. Ich setze deshalb auch voraus, dass $r' > r$. Dann lässt sich für Ω folgende bekannte Darstellung geben:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{r'} + \frac{r^2}{r'^3}X_2 + \frac{r^3}{r'^4}X_3 + \ldots\right).$$

Indessen ist zu beachten, dass wir nur die partiellen Ableitungen von Ω nach den Coordinaten des gestörten Körpers brauchen werden und dass wir uns in Folge dessen bei den aufzustellenden Entwicklungen auf die Betrachtung des Ausdruckes

$$\Omega_1 = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{r^2}{r'^3}X_2 + \frac{r^3}{r'^4}X_3 + \ldots\right)$$

beschränken dürfen.

Die Kugelfunctionen $X_1, X_2, \ldots$ sind definirt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 = \cos(r,r') \\ X_2 &= \tfrac{3}{2}X_1{}^2 - \tfrac{1}{2} \\ X_3 &= \tfrac{5}{2}X_1{}^3 - \tfrac{3}{2}X_1 \\ X_4 &= \tfrac{5\cdot 7}{2\cdot 4}X_1{}^4 - \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}2X_1{}^2 + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \end{aligned}$$

und die Recursionsformel

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)X_1 X_n + n X_{n-1} = 0.$$

Wir erinnern nun, dass mit i, i' die Neigungen des gestörten bezw. störenden Körpers gegen die Ekliptik (oder die sonst gewählte Fundamentalebene), mit ϑ, ϑ' die Längen der aufsteigenden Knoten der beiden Bahnen in Bezug auf dieselbe Grundebene bezeichnet werden, und dass

$$\omega = \pi - \vartheta, \quad \omega' = \pi' - \vartheta'.$$

Ferner sei J die gegenseitige Neigung zwischen der Bahn des gestörten und derjenigen des störenden Körpers. Dann definiren wir noch zwei Grössen φ, ψ, deren geometrische Bedeutung aus den Definitionsgleichungen erhellt, nämlich

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\vartheta-\vartheta')\sin\tfrac{1}{2}(i+i') \\ \sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\vartheta-\vartheta')\sin\tfrac{1}{2}(i-i') \\ \cos\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\vartheta-\vartheta')\cos\tfrac{1}{2}(i+i') \\ \cos\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\vartheta-\vartheta')\cos\tfrac{1}{2}(i-i'); \end{aligned}$$

und setzen endlich

$$\begin{aligned} 2U &= \omega - \omega' - (\varphi - \psi) \\ 2V &= \omega + \omega' - (\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Dann können wir $\cos(r,r') = X_1$ in der Form schreiben:

$$\chi_1 = \cos^2\frac{1}{2}J\cos(f-f'+2U) + \sin^2\frac{1}{2}J\cos(f+f'+2V)$$

und hierfür lässt sich endlich, wenn man

$$\xi'_1 = \cos^2\frac{1}{2}J\cos(f'-2U) + \sin^2\frac{1}{2}J\cos(f'+2V)$$
$$\xi'_2 = \cos^2\frac{1}{2}J\sin(f'-2U) - \sin^2\frac{1}{2}J\sin(f'+2V)$$

einführt, nehmen

$$X_1 = \xi'_1\cos f + \xi'_2\sin f,$$

wo man noch bemerken wird, dass ξ'_1, ξ'_2 die Werthe von X_1 für $f=0$ und $f=\frac{1}{2}\pi$ sind.

Diesen letzten Ausdruck von X_1 führen wir nun in die X_n ein und bezeichnen noch

$$\frac{r}{a}\cos f = x, \quad \frac{r}{a}\sin f = y.$$

Dann haben wir für den hier zu verwendenden Theil der Störungsfunction die Entwickelung

$$\begin{aligned} a\Omega_1 &= S_{2,0}\,x^2 + S_{1,1}\,xy + S_{0,2}\,y^2 \\ &+ S_{3,0}\,x_3 + S_{2,1}\,x^2y + S_{1,2}\,xy^2 + S_{3,0}\,y^3 \\ &+ \ldots\ldots \qquad\qquad = \Sigma S_{m,n}\,x^m\,y^n \end{aligned}$$

oder

$$a\Omega_1 = \Sigma H_\varkappa,$$

wenn $H_\varkappa$ eine homogene Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades (von $\varkappa = 2$ an) der Argumente x, y bedeutet. Es ergiebt sich daher schon hier nach bekannten Sätzen das Bestehen der Relation

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \Sigma\varkappa H_\varkappa,$$

wo hier nach obigem Ω statt Ω_1 geschrieben werden durfte.

Was die S-Functionen angeht, so sehen wir, dass

$$S_{2,0} = \frac{m'}{1+m}\cdot\frac{a^3}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\xi'^2_1 - \frac{1}{2}\right),\ S_{1,1} = \frac{m'}{1+m}\frac{a^3}{r'^3}\cdot 3\xi'_1\xi'_2,\ S_{0,2} = \frac{m'}{1+m}\frac{a^3}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\xi'^2_2 - \frac{1}{2}\right)\text{u.s.w.},$$

wonach also $S_{m,n}$ allgemein sein wird

$$S_{m,n} = \frac{m'}{1+m}\cdot\frac{a^{m+n+1}}{r'^{m+n+1}}\mathfrak{S}_{m,n},$$

und $\mathfrak{S}_{m,n}$ sich bei der Entwicklung von Ω ergiebt, wenn in dieser Function $r' = a$ gesetzt wird und alle Glieder, in denen $m+n<2$, weggelassen werden. Diese

Coefficienten werden daher als Entwicklungscoefficienten auftreten, wenn wir den Ausdruck

$$(1 + x^2 + y^2 - 2\xi'_1 x - 2\xi'_2 y)^{-\frac{1}{2}}$$

durch eine Potenzreihe nach den Argumenten x, y darstellen (und dabei wieder die Glieder unterdrücken, für die $m + n < 2$).

Wie diese Entwicklung anzustellen ist, ist bekannt. Wir erhalten folgenden Ausdruck für $\mathfrak{S}_{m,n}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{m,n} = {} & \frac{(2m+2n-1)!}{2^{m+n-1}(m+n-1)!\,m!\,n!}\,\xi'_1{}^m\xi'_2{}^n - \frac{1}{2}\left(\frac{(2m+2n-3)!}{2^{m+n-2}(m+n-2)!\,m!\,(n-2)!}\,\xi'_1{}^m\xi'_2{}^{n-2}\right. \\
& \left. + \frac{(2m+2n-3)!}{2^{m+n-2}(m+n-2)!\,(m-2)!\,n!}\,\xi'_1{}^{m-2}\xi'_2{}^n\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2m+2n-5)!}{2^{m+n-3}(m+n-3)!\,m!\,(n-4)!}\,\frac{\xi'_1{}^m\xi'_2{}^{n-4}}{2!}\right. \\
& + 2\cdot\frac{(2m+2n-5)!}{2^{m+n-3}(m+n-3)!\,(m-2)!\,(n-2)!}\,\frac{\xi'_1{}^{m-2}\xi'_2{}^{n-2}}{2!} + \frac{(2m+2n-5)!}{2^{m+n-3}(m+n-3)!\,(m-4)!\,n!}\,\frac{\xi'_1{}^{m-4}\xi'_2{}^n}{2!}\Big) \\
& - \frac{1}{8}\left(\frac{(2m+2n-7)!}{2^{m+n-4}(m+n-4)!\,m!\,(n-6)!}\,\frac{\xi'_1{}^m\xi'_2{}^{n-6}}{3!} + 3\,\frac{(2m+2n-7)!}{2^{m+n-4}(m+n-4)!\,(m-2)!\,(n-4)!}\,\frac{\xi'_1{}^{m-2}\xi'_2{}^{n-4}}{3!}\right. \\
& \left. + 3\,\frac{(2m+2n-7)!}{2^{m+n-4}(m+n-4)!\,(m-4)!\,(n-2)!}\,\frac{\xi'_1{}^{m-4}\xi'_2{}^{n-2}}{3!} + \frac{(2m+2n-7)!}{2^{m+n-4}(m+n-4)!\,(m-6)!\,n!}\,\frac{\xi'_1{}^{m-6}\xi'_2{}^n}{3!}\right) \\
& + \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

und wenn wir noch mit a' die halbe grosse Axe der Bahn des störenden Körpers bezeichnen, so können wir schreiben:

$$S_{\mu,\nu} = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{a}{a'}\right)^{\mu+\nu+1}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{\mu+\nu+1}\mathfrak{S}_{\mu,\nu}.$$

Es mögen die Coefficienten für die drei ersten H-Functionen, deren man immer benöthigt sein wird, hier kurz zusammengestellt werden:

$$\mathfrak{S}_{2,0} = \frac{3}{2}\xi'_1{}^2 - \frac{1}{2},\quad \mathfrak{S}_{1,1} = 3\xi'_1\xi'_2,\quad \mathfrak{S}_{0,2} = \frac{3}{2}\xi'_2{}^2 - \frac{1}{2},$$

$$\mathfrak{S}_{3,0} = \frac{5}{2}\xi'_1{}^3 - \frac{3}{2}\xi'_1,\quad \mathfrak{S}_{2,1} = \frac{15}{2}\xi'_1{}^2\xi'_2 - \frac{3}{2}\xi'_2,\quad \mathfrak{S}_{1,2} = \frac{15}{2}\xi'_1\xi'_2{}^2 - \frac{3}{2}\xi'_1,\quad \mathfrak{S}_{0,3} = \frac{5}{2}\xi'_2{}^3 - \frac{3}{2}\xi'_2$$

$$\mathfrak{S}_{4,0} = \frac{35}{8}\xi'_1{}^4 - \frac{15}{4}\xi'_1{}^2 + \frac{3}{8},\quad \mathfrak{S}_{3,1} = \frac{35}{2}\xi'_1{}^3\xi'_2 - \frac{15}{2}\xi'_1\xi'_2,\quad \mathfrak{S}_{2,2} = \frac{105}{4}\xi'_1{}^2\xi'_2{}^2 - \frac{15}{4}\xi'_1{}^2 - \frac{15}{4}\xi'_2{}^2 + \frac{3}{4},$$

$$\mathfrak{S}_{1,3} = \frac{35}{2}\xi'_1\xi'_2{}^3 - \frac{15}{2}\xi'_1\xi'_2,\quad \mathfrak{S}_{0,4} = \frac{35}{8}\xi'_2{}^4 - \frac{15}{4}\xi'_2{}^2 + \frac{3}{8}.$$

§ 6.

Die Störungsfunction ist nun also dargestellt in der Form

$$a\Omega = \Sigma S_{\mu,\nu}\,x^\mu y^\nu \qquad (\mu+\nu > 2).$$

Die explicite Darstellung der Producte $x^\mu y^\nu$ macht nach den Darlegungen und Formeln der §§ 1—4 keinerlei Schwierigkeit. Wir können uns daher zunächst der noch vorliegenden Hauptaufgabe zuwenden, die Coefficienten S als Functionen unserer unabhängigen Veränderlichen u darzustellen. Es ist nun bekannt, dass $S_{\mu,\nu}$ sich ausdrücken lässt als eine lineare Function von $\cos f'$, $\cos 2f', \ldots,$ $\cos(2\mu + 2\nu)f$, $\cos(2\mu + 2\nu + 1)f'$; $\sin f'$, $\sin 2f', \ldots,$ $\sin(2\mu + 2\nu)f'$, $\sin(2\mu + 2\nu + 1)f'$. Und zwar sind die Coefficienten dieser Darstellung ganze rationale Functionen von $\sin^2 \frac{1}{2} J$, e' und $\frac{1}{1-e'^2}$, wenn e' die Excentricität des störenden Körpers bedeutet. Indessen können uns diese Darstellungen in der Praxis nichts nützen. Als störenden Körper haben wir, wie schon erwähnt, vorzugsweise Jupiter und Saturn im Auge. Und alle auf diese grossen Planeten bezüglichen Entwicklungen, welche zur Zeit, solange umfangreichere Publicationen von Seiten Gyldén's und seiner Schüler noch ausstehen, allgemein zugänglich sind, sind diejenigen von Leverrier, der als Entwicklungsvariabele die mittlere Anomalie des störenden Körpers benutzt hat. Wir müssen also in Hinsicht auf die Anwendung annehmen, die Functionen S seien als Functionen der mittleren Anomalie g' des störenden Körpers gegeben, wonach sie also als Fourier'sche Reihen in Bezug auf die genannte Variabele zu betrachten sind. Die Anführung dieser Entwicklungen an dieser Stelle erscheint nicht geboten; sie sind oft gegeben, und über sie etwa Tisserand, Mécanique céleste I, oder die verschiedenen classischen Arbeiten Hansen's zu vergleichen.

Es bietet sich uns also das Problem dar, die Functionen $\sin \varkappa g'$, $\cos \varkappa g'$ als trigonometrische Reihen nach den Vielfachen des Argumentes u zu entwickeln.

Die früher gefundene Differentialformel für die mittlere Anomalie wird nun, wenn wir wieder

$$u = \frac{\omega v}{\pi}, \quad du = \frac{\omega}{\pi} dv$$

setzen

$$\frac{dg}{dv} = 2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{1+\varkappa'^2}\left(\frac{2\omega}{\pi}\varkappa'\chi u\right)^3$$

(wo rechts zur Abkürzung noch u geschrieben ist). Und hieraus folgt durch Integration unter Beachtung der Bedingung $g = 0$, $v = 0$

$$g = v + 4\Sigma(-1)^r \left\{\frac{\frac{1}{r}q^r}{1+q^{2r}}\left(1 + \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{r^2}{1+\varkappa'^2}\right)\right\} \sin rv\,.$$

Dabei sei einschaltend bemerkt, dass diese Gleichung, in der Form geschrieben

$$v = g + qf(v),$$

mit Hülfe der Lagrange'schen Reihe dazu führt, den einem gegebenen Werthe g, also

einem gegebenen Zeitpunkte, entsprechenden Werth v zu berechnen. Ferner aber, wenn g' die mittlere Anomalie des störenden Körpers bezeichnet, so ist

$$dg' = \frac{n'}{n} dg = \mu dg ,$$

wo also n, n' die bez. mittleren Bewegungen sind. Ist also g'_0 der Werth von g' für den Zeitpunkt, von dem an die Integration beginnt, so hat man

$$g' = \mu v + g'_0 + 4\mu\varphi(v; q) ,$$

wo φ die oben im Ausdrucke für g gegebene Reihe ist.

Betrachten wir nun hiernach g' als Function von q, so können wir jede der hier in Betracht kommenden Functionen $f(g') = F(v; q) =$ mit Hülfe der Mac Laurin'schen Reihe entwickeln

$$F(v; q) = F(v; o) + q \cdot \frac{\partial F(v; q)}{\partial q}_0 + \frac{1}{2!} q^2 \frac{\partial^2 F(v; q)}{\partial q^2}_0 + \ldots$$

Was die wirkliche Ausführung einer solchen Entwickelung anbetrifft, so habe ich mich überzeugt, dass man sehr schnell und, soweit bei Störungsrechnungen davon überhaupt die Rede sein kann, mühelos zum Ziel kommt, wenn man rein numerisch verfährt, also von der Aufstellung analytischer Ausdrücke für die Coefficienten absieht. Indessen ist es auch ohne Schwierigkeit möglich, solche analytische Entwicklungen durchzuführen, und ich will daher noch die ersten Glieder für $\sin \varkappa g'$ und $\cos \varkappa g'$ angeben.

Ich setze $\varkappa\mu = \nu$, dann ist also

$$\varkappa g' - \nu v - \varkappa g'_0 = 4\nu\varphi(v; q)$$

und man wird finden

$$\begin{aligned} \sin(\varkappa g' - \nu v - \varkappa g'_0) &= f_1(v; q) \\ \cos(\varkappa g' - \nu v - \varkappa g'_0) &= f_2(v; q) , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sin \varkappa g' &= f_1(v; q) \cos(\nu v + \varkappa g'_0) + f_2(v; q) \sin(\nu v + \varkappa g'_0) \\ \cos \varkappa g' &= f_2(v; q) \cos(\nu v + \varkappa g'_0) + f_1(v; q) \sin(\nu v + \varkappa g'_0) \end{aligned}$$

Es sind also die Functionen

$$f_1(v; q) = \sin[4\nu\varphi(v; q)] , \quad f_2(v; q) = \cos[4\nu\varphi(v; q)]$$

darzustellen durch die M'Laurin'sche Reihe. Behandeln wir zunächst die erste, so sind die Werthe ${f_1}^{(n)}(v; o)_q$ zu ermitteln. Wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$w = 4\nu\varphi(v; q) = \Sigma\varphi_r \cdot \sin rv ,$$

so ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial f_1}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial q} = \cos w \cdot \Sigma\varphi'_r \cdot \sin rv ,$$

wenn wir noch die Ableitungen der Functionen φ_r nach q in Lagrange's Manier bezeichnen. Für die letzte Formel können wir auch schreiben

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = f_2(v;q) \cdot \Sigma \varphi'_r \cdot \sin rv$$

und dieser gegenüber steht die Formel

$$\frac{\partial f_2}{\partial q} = -f_1(v;q) \cdot \Sigma \varphi'_r \cdot \sin rv$$

Man findet weiter

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q^2} = -f_1 \cdot \Sigma^2 \varphi'_r \cdot \sin rv + f_2 \cdot \Sigma \varphi''_r \cdot \sin rv$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q^2} = -f_1 \cdot \Sigma \varphi''_r \cdot \sin rv - f_2 \cdot \Sigma^2 \varphi'_r \cdot \sin rv.$$

Schreiben wir die beiden erlangten Ergebnisse so:

$$\frac{\partial \sin w}{\partial q} = C_1 \cos w$$

$$\frac{\partial^2 \sin w}{\partial q^2} = S_2 \sin w + C_2 \cos w,$$

so ist entsprechend

$$\frac{\partial \cos w}{\partial q} = -C_1 \sin w$$

$$\frac{\partial^2 \cos w}{\partial q^2} = -C_2 \sin w + S_2 \cos w,$$

und wir finden leicht weiter

$$\frac{\partial^3 \sin w}{\partial q^3} = S_3 \sin w + C_3 \cos w$$

$$\frac{\partial^3 \cos w}{\partial q^3} = -C_3 \sin w + S_3 \cos w,$$

wo

$$S_3 = \frac{\partial S_2}{\partial q} - C_2 \frac{\partial w}{\partial q}, \quad C_3 = \frac{\partial C_2}{\partial q} + S_2 \frac{\partial w}{\partial q};$$

und es lässt sich leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ zeigen, dass überhaupt

$$\frac{\partial^n \sin w}{\partial q^n} = S_n \sin w + C_n \cos w$$

$$\frac{\partial^n \cos w}{\partial q^n} = -C_n \sin w + S_n \cos w$$

$$S_n = \frac{\partial S_{n-1}}{\partial q} - C_{n-1} \frac{\partial w}{\partial q}, \quad C_n = \frac{\partial C_{n-1}}{\partial q} + S_{n-1} \frac{\partial w}{\partial q}.$$

Beachten wir nun, dass für $q = 0$, $\sin w = 0$, $\cos w = 1$, so kommt folgende formale Darstellung

$$\sin w = C_1 \cdot q + C_2 \cdot \frac{q^2}{2!} + \ldots + C_n \cdot \frac{q_n}{n!} + \ldots$$

$$\cos w = 1 + S_1 \cdot q + S_2 \cdot \frac{q_2}{2!} + \ldots + S_n \cdot \frac{q_n}{n!} + \ldots, \qquad (S_1 = 0)$$

wo die Coefficienten S_x, C_x sich als lineare endliche Ausdrücke in $\sin v$, $\sin 2v, \ldots,$ $\sin rv$ darstellen. Es wird sich gleich zeigen, bis zu welchem Werthe von r in einem gegebenen S_x oder C_x die Grössen $\sin rv$ auftreten.

Zu diesem Zwecke betrachten wir den Coefficienten φ_r, der, abgesehen vom Vorzeichen und dem Factor $4r$, sich darstellen lässt

$$\varphi_r = \psi_r \cdot \chi_r,$$

wo

$$\psi_r = \frac{1}{r} \frac{q^r}{1 + q^{2r}}, \quad \chi_r = 1 + \lambda r^2, \quad \lambda = \frac{4}{\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{\pi} x'\right)^2},$$

und, da stets $q < 1$, für ψ die Darstellung existirt

$$\psi_r = \frac{1}{r} q^r [1 + \mathfrak{P}(q^{2r})], \quad \mathfrak{P}(0) = 0.$$

Für die Bestimmung von S_n, C_n ist die Bildung der Grösse $\frac{d^n \varphi_r}{dq^n}$ nothwendig. Nun ist

$$d^n \varphi_r = \chi d^n \psi + n d^{n-1} \psi \cdot d\chi + \ldots + \psi d^n \chi.$$ (Der Kürze halber sind die Indices weggelassen.)

Aus der Darstellung von ψ erkennt man aber, dass alle Ableitungen dieser Function bis zur $(r-1)$ten Ordnung einschliesslich für $q = 0$ verschwinden, und es sieht sich ferner leicht ein, dass man, um den Coefficienten von q^r in den Entwicklungen von $\sin w$, $\cos w$ zu erlangen, diese Functionen nur bis zum Gliede mit dem Index r einschliesslich zu differentiiren braucht, so dass also dieser Coefficient sich im Allgemeinen als lineare Function von $\sin v, \ldots, \sin rv$ darstellen wird. Dabei wird man noch beachten, dass für $q = 0$

$$\frac{d^r \varphi^r}{dq^r} = \chi \frac{d^r \psi}{dq^r} = (1 + 2r^2) \frac{d^r \psi}{dq^r},$$

da für $q = 0$

$$\frac{2\omega}{\pi} = 1, \quad \frac{2\omega}{\pi} x' = 1.$$

Für die höheren Differentialquotienten von ψ lässt sich eine independente Darstellung geben.*) In der That ist ψ als Function von $y = q^r$ anzusehen. Setzt man

*) Vgl. mein Lehrbuch der höheren Analysis, Band I, Differentialrechnung. Berlin 1893.

$$\psi = f(y), \quad \frac{d^n\psi}{dq^n} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{Z_\varkappa}{\varkappa!} f^\varkappa_{(y)},$$

so findet man leicht

$$Z_\varkappa = \sum_i (-1)^i \binom{\varkappa}{i} q^{ri} (r\varkappa - ri) \ldots (r\varkappa - ri - n + 1)\, q^{r\varkappa - ri - n},$$

wo die Summe mit demjenigen Werthe des Index i abbricht, welcher der in $\frac{r\varkappa - n}{r}$ enthaltenen grössten ganzen Zahl gleich ist. Unter gehöriger Beachtung dieses letzteren Umstandes lässt sich daher für den obigen Differentialquotienten folgende formale Darstellung geben:

$$\frac{d^n\psi}{dq^n} = \frac{n!}{q^n}\left(\mu_1 \cdot q^r f'(y) + \mu_2 \cdot \frac{q^{2r}}{2!} f''(y) + \mu_3 \frac{q^{3r}}{3!} f'''(y) + \ldots\right),$$

wo

$$\mu_\varkappa = \binom{\varkappa \cdot r}{n} - \varkappa \binom{\overline{\varkappa-1} \cdot r}{n} + \binom{\varkappa}{2}\binom{\overline{\varkappa-2} \cdot r}{n} - + \ldots$$

und die Glieder wegzulassen sind, in denen negative Potenzen von q auftreten.

Die Grössen $\frac{2\omega}{\pi}$, $\frac{2\omega}{\pi}\varkappa'$ sind bekanntlich definirt durch die Reihen

$$\frac{2\omega}{\pi} = (1 + 2q + 2q^4 + \ldots + 2q^{\nu^2} + \ldots)^2$$

$$\frac{2\omega}{\pi}\varkappa' = (1 - 2q + 2q^4 + \ldots + (-1)^\nu 2q^{\nu^2} + \ldots)^2.$$

Eine independente Darstellung der höheren Differentialquotienten der aus ihnen gebildeten Function λ scheint sich nicht geben zu lassen, indessen lässt sich die successive Differentiation in ihren Ergebnissen leicht genug übersehen, wie ich denn auch in der wirklichen Ausführung der Rechnung in meinen Arbeiten über die Jupiterstörungen einiger kleiner Planeten mit grosser Excentricität (Typus (33) Polyhymnia) bei Bildung der Ableitungen von ψ von obiger independenter Darstellung keinen Gebrauch gemacht habe.

Die Endformeln, welche man zu verwenden hat, vereinfachen sich auch noch beträchtlich, wenn man beachtet, dass $\lambda(q) = \lambda(-q)$, dass also die ungeraden Ableitungen von λ für $q = 0$ verschwinden werden, und dass ψ für $q = 0$ ebenfalls verschwindet. Man hat daher für $q = 0$ (wenn der Kürze halber Differentiale geschrieben werden)

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \chi d\psi \\
d^2\varphi &= \chi d^2\psi \\
d^3\varphi &= 3d^2\chi d\psi + \chi d^3\psi \\
d^4\varphi &= 6d^2\chi d^2\psi + \chi d^4\psi \\
d^5\varphi &= 5d^4\chi d\psi + 10d^2\chi d^3\psi + \chi d^5\psi \\
d^6\varphi &= 15d^4\chi d^2\psi + 15d^2\chi d^4\psi + \chi d^6\psi \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Weiter wie bis zur sechsten Potenz von q wird man wohl nie die Entwicklung zu treiben haben. Bei der sehr beträchtlichen Excentricität ($e = \sin 19^\circ 28' 16''$) des Planeten (33) z. B. wird schon $\log q^6 = 1{,}8137-10$. Aus Gründen der Raumersparniss will ich mich hier auf die Angabe der Glieder bis zur dritten Potenz inclusive beschränken (was übrigens auch der Führung der Rechnung bei anderen Methoden entspricht, bezw. noch etwas weiter geht) und verweise wegen der ferneren Glieder auf meine in einiger Zeit erscheinenden Tafeln der Polyhymnia. Man erhält unter Berücksichtigung des bisher Gesagten leicht, für $q = 0$,

$$\frac{d\varphi_r}{dq} = (-1)^r \cdot \frac{4\nu}{r}(1 + 2r^2)\,\frac{d}{dq}\frac{q^r}{1+q^{2r}}$$

$$\frac{d^2\varphi_r}{dq^2} = (-1)^r \cdot \frac{4\nu}{r}(1 + 2r^2)\,\frac{d^2}{dq^2}\frac{q^r}{1+q^{2r}}$$

$$\frac{d^3\varphi_r}{dq^3} = (-1)^r \cdot \frac{4\nu}{r}\left\{(1 + 2r^2)\,\frac{d^3}{dq^3}\frac{q^r}{1+q^{2r}} - 3\cdot 96\cdot r^2\,\frac{d}{dq}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\right\},$$

wo rechts nach Ausführung der angezeigten Differentiationen noch $q = 0$ zu setzen ist.

Wir haben also

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \sum \frac{d\varphi_r}{dq}\cdot \sin rv$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = \sum \frac{d^2\varphi_r}{dq^2}\cdot \sin rv$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial q^3} = \sum \frac{d^3\varphi}{dq^3}\cdot \sin rv$$

und ferner

$$S_1 = 0, \quad C_1 = \frac{\partial w}{\partial q}$$

$$S_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)^2, \qquad C_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}$$

$$S_3 = -3\,\frac{\partial w}{\partial q}\,\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}, \quad C_3 = \frac{\partial^3 w}{\partial q^3} - \left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)^3.$$

Endlich bemerkt man, dass

$$\left(\frac{d}{dq}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\right)_{q=0} = 1 \text{ für } r = 1, \text{ und } = 0 \text{ für jedes } r > 1$$

$$\left(\frac{d^2}{dq^2}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\right)_{q=0} = 2 \text{ für } r = 2, \text{ und } = 0 \text{ für jedes } r > 1$$

$$\left(\frac{d^3}{dq^3}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\right)_{q=0} = -6 \text{ für } r = 1 \text{ und } = +6 \text{ für } r = 3; \text{ aber } = 0 \text{ für jedes andere in Betracht kommende } r.$$

Es sind also folgende definitiven Ausdrücke zu verwenden:

$$\frac{\partial w}{\partial q} = -12\varkappa\mu \cdot \sin v$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = +36\varkappa\mu \cdot \sin 2v$$
$$\frac{\partial^3 w}{\partial q^3} = +360\varkappa\mu \cdot \sin v - 76\varkappa\mu \sin 3v,$$

wo nun wieder $\varkappa\mu$ für ν eingesetzt ist. Wir erhalten so zunächst

$$\sin w = -12\varkappa\mu \cdot q \cdot \sin v + 18\varkappa\mu \cdot q^2 \cdot \sin 2v + (60\varkappa\mu + 216\varkappa^3\mu^3) q^3 \sin v - \left(\frac{38}{3}\varkappa\mu - 72\varkappa^3\mu^3\right) q^3 \sin 3v$$

$$\cos w = 1 - 36\varkappa^2\mu^2 q^2 + 36\varkappa^2\mu^2 q^2 \cos 2v + 108\varkappa^2\mu^2 q^3 \cos v - 108\varkappa^2\mu^2 q^3 \cos 3v,$$

welche Resultate wir auch so ordnen wollen

$$\sin w = s_1 \sin v + s_2 \sin 2v + s_3 \sin 3v; \quad \cos w = c_0 + c_1 \cos v + c_2 \cos 2v + c_3 \cos 3v$$

oder

$$\sin w = \Sigma s_\lambda \sin \lambda v, \quad \cos w = \Sigma c_\lambda \cos \lambda v.$$

Dann ist

$$2 \sin \varkappa g' = \sum_\lambda (s_\lambda + c_\lambda) \sin [(\varkappa\mu + \lambda) v + \varkappa g'_0] - \sum_\lambda (s_\lambda - c_\lambda) \sin [(\varkappa\mu - \lambda) v + \varkappa g'_0]$$
$$2 \cos \varkappa g' = \sum_\lambda (s_\lambda + c_\lambda) \cos [(\varkappa\mu + \lambda) v + \varkappa g'_0] - \sum_\lambda (s_\lambda - c_\lambda) \cos [(\varkappa\mu - \lambda) v + \varkappa g'_0].$$

Damit ist nun aber unsere Hauptaufgabe erledigt. Denn die Coefficienten $S_{m,n}$, welche oben betrachtet wurden, sind dargestellt durch trigonometrische Reihen nach den Argumenten $\varkappa g'$ und können nun also in Functionen der Integrationsvariabeln v übergeführt werden. Jede einzelne der H-Functionen, aus denen wir die Entwicklung der Störungsfunctionen bestehen lassen, also auch Ω selbst, stellen wir nun so dar:

$$\Sigma \left\{ a_{ii'} \cos [(i + i'\mu) v + \alpha_{ii'}] + b_{ii'} \sin [(i + i'\mu) v + \beta_{ii'}] \right\}$$

und analoge Form erhalten die Differentialquotienten, durch deren Integration die Störungen ermittelt werden. Ein näheres Eingehen auf diese Formen, welche nichts wesentlich Neues bieten, sondern denen anderer Theorien ganz analog sind und nur rechnerisches Interesse haben können, darf hier wohl unterlassen werden. In meinen Tafeln der Polyhymnia habe ich alles hierauf Bezügliche in extenso zusammengestellt. Ich will hier zum Schlusse nur noch ganz kurz darauf hinweisen, dass die Anwendung dieser Methode mir auch deshalb noch einigermassen vortheilhaft erscheint, weil sie mit einer gewissen Leichtigkeit gestattet, solche Glieder, die bei der Integration einen sehr kleinen Divisor bekommen, weil μ einem rationalen Bruche nahe gleich ist, gesondert zu berechnen. Es ist leicht zu sehen, wie man bei auf diesen Punkt bezüglichen Ueberlegungen wieder von den Darstellungen von $\sin \varkappa g'$, $\cos \varkappa g'$ ausgehen und dann ein Urtheil gewinnen wird, von welchem Gliede einer solchen Darstellung in der Entwicklung eines der Störungsausdrücke ein Glied mit kritischem Index $(i - i'\mu)$ erzeugt wird.

P. Stankiewicz' Buchdruckerei, Berlin SW., Bernburgerstr. 14.

VITA.

Natus sum *Harry Gravelius* Francoforti ad Moenum die XXII. Maj. anni h. s. LXI. patre Eduardo, qui medicinam exercebat, matre Emilie, e gente Fritsch. Parentes praematura morte lugeo esse ereptos. Fidei addictus sum evangelicae. Primum privatam adii scholam, deinde gymnasium reale quod dicitur Woehlerschule, ibique testimonium maturitatis anno LXXX adeptus sum.

In universitatibus Gottingae et Berolini per septem semestria studiis me dedi rerum naturalium, praecipue artis mathematicae et astronomicae. Quibus disciplinis diligenter tractatis aliquamdiu peregrinatus Berolini nonnulla opuscula (annis LXXXVI–XCII) edidi.

Praeceptores illustrissimi mihi fuerunt: *H. A. Schwarz*, *E. Schering*, *M. A. Stern*, *Riecke*, *Listing*, *Hettner*, *K. Schering*, *Sir Robert Stawell Ball*, *Weierstrass*, *Kronecker*, *Kummer*, *Kirchhoff*, *Helmholtz*, *Foerster*, *Knoblauch*, quibus omnibus maximas ago gratias semperque habebo.